

Satz des Pythagoras

Mehr Details

Uralte Technik – aktuelle Mathematik

Um die auch heute noch verblüffende Präzision ihrer Pyramiden zu erreichen, teilten die ägyptischen Seilspanner ein langes Seil mit Knoten in zwölf Teile. Mit Hilfe von Pflöcken bildeten sie mit diesem Seil ein Dreieck mit dem Verhältnis 3:4:5. Auf diese Weise wird immer ein rechter Winkel gebildet. Auch die indischen Priester bestimmten ihre rechten Winkel, beispielsweise beim Bau ihrer Altäre, auf diese Weise, jedoch mit dem Seitenverhältnis 15:36:39.

Was bei Ägyptern und Indern in praktischer, probierender Anwendung entstanden war, erhielt im Lehrsatz des Pythagoras mit $a^2 + b^2 = c^2$ seine mathematische Darstellung. Tatsächlich ergeben sich mit $3^2 + 4^2 = 5^2$ (ägyptische Seilspanner) und $15^2 + 36^2 = 39^2$ (indische Priester) gültige Gleichungen.

Der Satz des Pythagoras

Der Satz des Pythagoras ist einer der fundamentalen Sätze der euklidischen Geometrie (Geometrie des uns bekannten zwei- und dreidimensionalen Raums nach dem griechischen Mathematiker Euklid). Der Satz des Pythagoras besagt, dass in allen ebenen, rechtwinkligen Dreiecken die Summe der Flächeninhalte der Kathetenquadrate $a^2 + b^2$ gleich dem Flächeninhalt des Hypothenusenquadrats c^2 ist:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

wobei a und b die Längen der dem rechten Winkel anliegenden Seiten, der Katheten, und c die Länge der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite, der Hypothenuse, darstellen (Abb. 1).

Die Umkehrung gilt ebenso: Gilt die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ in einem ebenen Dreieck, so ist dieses Dreieck rechtwinklig, wobei die Seite mit der Länge c dem rechten Winkel gegenüberliegt.

Ein sogenanntes Pythagoreisches Tripel ist eine Gruppe von drei ganzen Zahlen, für die die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt. Es gibt unendlich viele Tripel mit dieser Eigenschaft. Das einfachste Tripel bilden die Zahlen (3,4,5) (siehe ägyptische Seilspanner), da $3^2 + 4^2 = 5^2$. Andere Tripel sind zum Beispiel (6,8,10) oder (15,20,25) und (15,36,39) (siehe indische Priester).

Abb. 1: Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$.

Höhensatz

Zur Satzgruppe des Pythagoras gehört außerdem der Höhensatz: Die Höhe eines rechtwinkligen, ebenen Dreiecks zum Quadrat ist

flächengleich mit den beiden zum Rechteck konstruierten Hypothenusenabschnitten.

Als Gleichung ausgedrückt lautet der Höhensatz:

$$h^2 = p \cdot q$$

wobei h die Höhe des Dreiecks auf der Hypothenuse c und p und q die beiden Hypothenusenabschnitte darstellen (Abb. 2).

Abb. 2: Höhensatz $h^2 = p \cdot q$.

Kathetensatz

Ein weiterer fundamentaler Satz ist der Kathetensatz. Er besagt, dass in einem ebenen, rechtwinkligen Dreieck folgendes gilt: Der Flächeninhalt eines Kathetenquadrats ist gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks, das aus der Länge der Hypothenuse und der Länge des dazugehörigen Hypothenusenabschnitts gebildet wird.

Als Gleichung ausgedrückt lautet er:

$$a^2 = c \cdot q \text{ bzw. } b^2 = c \cdot p$$

wobei a bzw. b die Länge der Kathete, c die Länge der Hypothenuse und q bzw. p die Länge des zugehörigen Hypothenusenabschnitts darstellen (Abb. 3).

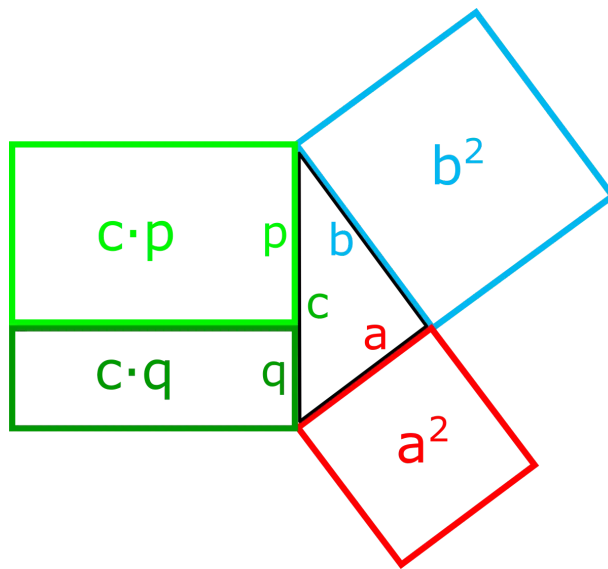


Abb. 3: Kathetensatz $a^2 = c \cdot q$ bzw. $b^2 = c \cdot p$.